ACTES D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
NOVA ÈPOCA / VOLUM 4 / 2011, p. 75-92
ISSN (ed. impr.): 2013-1666 / ISSN (ed. electr.): 2013-9640
DOI 10.2436/20.2006.01.163
http://revistes.iec.cat/index.php/AHCT
Rebut:13/12/2011 - Acceptat: 05/03/2012

EXAMEN DES TRAITÉS *SUR LA SECTION DU CYLINDRE* ET *SUR LA SECTION DU CÔNE* DE SÉRÉNOS D'ANTINOÉ À LA LUMIÈRE DE LA TRADITION DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE ANCIENNE

KONSTANTINOS NIKOLANTONAKIS*
DEPARTMENT OF PRIMARY EDUCATION, UNIVERSITY OF WESTERN

Résumé : *Sérénos d'Antinoé (III siècle après J.C.) était l'auteur de deux traités Sur la Section du cylindre et Sur la Section du Cône. Dans la deuxième partie de la Section du cylindre, Sérénos examine une définition par observation des droites parallèles donnée par son ami le géomètre Python, en s'appuyant sur une série des propositions (29-33). Nous allons examiner la façon de Sérénos de défendre cette définition par observation avec les outils de l'optique géométrique euclidienne et la tradition des coniques d'Apollonios. Les termes et les notions qu'il utilise étaient valides et légitimes pour les mathématiciens qui travaillaient à l'aide des outils mathématiques hellénistiques, bien que sa période d'activité soit éloignée des grands géomètres, Euclide et Apollonios.*
D'après nous, la nature des propriétés traitées dans son traité Sur la Section du Cône reste en partie un problème ouvert pour les historiens. Tous sont d'accord sur le fait que son but est de faire une étude comparative des sections produites dans un cône par l'intersection d'un plan qui passe par son sommet. Nous allons examiner quelques propositions et jeter de la lumière à un deuxième aspect du traité qui consiste à fonder géométriquement des propriétés optiques.

Mots clès : *Sérénos d'Antinoé, section du cylindre, section du cône, optique géométrique ancienne*

* Correspondance: KONSTANTINOS NIKOLANTONAKIS
Department of Primary Education, University of Western
Macedonia 3E km Florina – Niké. 53100, FLORINA, GREECE.
email: *nikolantonakis@noesis.edu.gr*

Examination of the treatises *On the Section of a Cylinder* and *On the Section of a Cone* of serenos of Antinoeia under the light of the Ancient Greek tradition on Optics

Summary : *Serenos of Antinoeia (III Century A.C.) was the author of two treatises On the Section of a Cylinder and On the Section of a Cone. In the second part of the treatise On the Section of a Cylinder, Serenos examines one definition by observation of parallel lines given by his friend the geometer Python. He bases his approach on a series of propositions (29-33). We are going to examine the way that Serenos defends this definition by observation with the tools of Euclidean geometrical optics and the tradition on conics of Apollonios. The terms and the notions Serenos uses were valid and legitimate for mathematicians working with the aid of the tools of Hellenistic mathematics.*
In our point of view, the nature of the properties in the treatise On the Section of a Cone is an open problem for historians. All of them agree on the fact that the goal is to do a comparative study on the sections produced in a cone by an intersection from a plan passing by its vertex. We are going to examine some propositions and throw light on a second aspect of this treatise which consists of basing geometrically optic properties.

Key words : *Serenos of Antinoeia, section of a cylinder, section of a cone, ancient geometrical optic*

Introduction

Sérénos d'Antinoé est l'auteur de deux traités mathématiques *Sur la section du cylindre* et *Sur la section du cône* que la tradition manuscrite nous a transmis à la suite des quatre premiers livres du traité des *Coniques* d'Apollonios de Pergé. Les historiens de l'Antiquité ne nous ont laissé aucun renseignement sur la personnalité et sur les circonstances de la vie de ce géomètre alexandrin.

Sérénos avait également écrit un commentaire (qui ne nous est pas parvenu) de cet ouvrage (*Les Coniques*) dans lequel il nous renvoie dans la proposition 17 de la *Section du cylindre*. Il ecrit : car tout ce qui a été démontré comme étant propre à cette section est également propre à l'ellipse du cône, ainsi que cela a été démontré dans les *Coniques*, au quinzième théorème, pour ceux qui sont à même de constater la justesse de ce théorème, et ainsi que nous l'avons démontré géométriquement nous-même dans des commentaires relatifs à cette proposition (Ver Eecke, 1929 : 29-30).

Certains historiens des mathématiques (P. Ver Eecke, J. L. Heiberg, Halley, P. Tannery, Bretschneider, Montucla, M. Chasles, F. Hultsch, F. Muller) donnent dans leurs oeuvres des petits passages sur la période de son activité en faisant des conjectures.

Une récente recherche de Micheline Decorps-Foulquier a démontré que Sérénos est postérieur au philosophe du moyen platonisme Harpocration et situe sa période d'activité au début du IIIe siècle (Decorps, 2000 : 38-39).

Ses arguments sont basés sur le témoignage du *Parisinus graecus* 1918. Ce manuscrit qui est consacré aux commentateurs d'Aristote, Philopon, Themistios et Michel Psellos présente, aux folios 144-148, après une série de notes anonymes sur des problèmes aristotéliciens, une discussion sur l'âme, la matière et la nature du mal qui abonde en références néoplatoniciennes. La discussion est menée par un chrétien qui confronte ses vues à celles des Grecs. La transition est assurée par une référence à l'interprétation d'Harpocration du mythe de la réincarnation. Le philosophe Harpocration est désigné de la manière suivante (f.145v°) : « Harpocration, le commentateur de Platon auquel se rapporte d'ordinaire le géomètre Sérénos en ce qui concerne la pensée platonicienne ». J. Whittaker (1979) a suggéré que ces notes avaient été rassemblées dans le proche voisinage de Michel Psellos qui fut l'artisan de la renaissance néoplatonicienne du XIe siècle à Byzance. Harpocration, nous le savons par Proclos, fut un disciple de Numénios et un éléve d'Atticos (vers 180 A.C.) et il était un philosophe du moyen platonisme. Ce témoignage est précieux puisqu'il nous apporte la seule chose dont nous puissions être sûrs : le géomètre Sérénos était un philosophe platonicien postérieur à Harpocration. La question est de savoir s'il en était éloigné dans le temps. Ensuite Micheline Decorps-Foulquier essaie de rapprocher Sérénos d'Harpocration en insistant sur le fait que le premier dépend si étroitement d'Harpocration dans sa lecture de Platon, ce qui rend a priori peu probable l'appartenance du premier aux cercles néoplatoniciens des Ve et VIe siècles, en général assez peu enclins à se réclamer des philosophes du moyen platonisme. En revanche, au IVe siècle, leurs oeuvres étaient lues et citées, comme l'attestent encore les fragments de Numénios et d'Atticos qui figurent dans la *Préparation évangélique* d'Eusèbe de Césarée. Par conséquent, Micheline Decorps-Foulquier propose à titre d'hypothèse le rapprochement de Sérénos à Harpocration et situe sa période d'activité au début du IIIe siècle de notre ère.

Le traité *Sur la Section du cylindre* peut être divisé en deux parties dans lesquelles Sérénos résoud deux problèmes de nature assez différente. Dans la *Section du cylindre* nous trouvons deux préambules. Au début du livre, juste avant les définitions, il définit le but de son essai en disant qu'il veut corriger la conception fausse qu'ont beaucoup de gens qui font de la géométrie et qui s'imaginent que la section transversale du cylindre est différente de celle du cône qu'on appelle ellipse. Dans les 19 premières propositions il essaie de démontrer que la courbe fermée déterminée par la section transversale d'un cylindre quelconque, non parallèle ni antiparallèle aux bases, est identique à l'ellipse déterminée dans les mêmes conditions dans un cône quelconque. Dans les propositions 20-28, il examine certains problèmes relatifs à la propriété démontrée dans la première partie que nous avons déjà évoquée.

Après la proposition 28, Sérénos pose dans un petit préambule le but de ses 5 dernières propositions dans lesquelles il expose son deuxième problème (propositions 29-33) selon lequel il veut examiner géométriquement une définition des parallèles, différente de celle d'Euclide, émise par son ami le géomètre Python. À ce point il faut signaler que nous ne savons rien sur Python.

Le géomètre Python, après avoir expliqué ce que sont les parallèles dans un de ses écrits, ne s'est pas contenté de ce qu'en avait dit Euclide. A ce point il fait implicitement référence au cinquième postulat qui s'énonce comme suit : « Si une droite tombant sur deux droites fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces deux droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits » (Peyrard, 1809 : 6). Le cinquième postulat, ou postulat des parallèles, dont l'énoncé présente la particularité d'avoir la forme d'un théorème a, dès le IIIe siècle av. J.C., troublé les commentateurs. Les tentatives de démonstration de ce postulat ont joué un rôle particulièrement important dans l'histoire de la géométrie et la littérature sur le sujet est immense. Jusqu'au XIXe siècle, toutes les tentatives connues de démonstration du postulat 5 reviennent bien évidemment à remplacer, explicitement ou pas, ce postulat par un (ou plusieurs) postulat plus ou moins équivalent, sans remettre en question un certain nombre de propriétés considérées comme allant de soi (infinité et continuité de la droite, axiome d'Archimède, axiome de Pasch, homogénéité de l'espace). Ces tentatives sont souvent couplées avec la tentative de définir le parallélisme des droites par l'équidistance (ce que fait Posidonios, Ier siècle av. J.C.), ce qui pour Proclos et Geminos est contestable du fait qu'il existe des lignes asymptotes qui se rapprochent indéfiniment sans se couper. Ce postulat a ouvert une discussion dans le monde hellénistique mais aussi arabe et latin jusqu'à la naissance des géométries non-euclidiennes.

Python définit les parallèles au moyen d'un exemple plus rationnel comme suit : « les parallèles sont des droites telles que celles que nous voyons se former sur les murs ou sur le sol par les ombres de colonnes à l'opposé desquelles brûle un flambeau » (Ver Eecke, 1929 : 54).

Il continue dans ce préambule en citant que :

Bien que la chose eût parue fort risible à tout le monde, elle n'est cependant pas ridicule pour nous qui respectons l'écrivain, car cet homme est un ami. Mais il faut examiner comment cela se présente mathématiquement, et cet examen se rattache aux choses que nous avons considérées ici précédemment; car c'est au moyen d'elles que nous démontrerons ce que nous avons proposé (Ver Eecke, 1929 : 54).

La démarche de Sérénos s'inscrit dans cette tradition des travaux sur la théorie des parallèles et enrichit les demarches effectuées dans le monde grec. Pour cette raison nous allons examiner la façon de Sérénos de défendre cette définition *par observation* avec les outils de l'optique géométrique Euclidienne[1] et la tradition des coniques d'Apollonios. Nous allons examiner minutieusement une par une les propositions, les termes et les notions qu'il utili-

1. L'*Optique* d'Euclide est une collection de 58 propositions, qui sont précédées par 7 définitions. Ces propositions nous donnent une description géométrique de la formation des apparences du point de vue des dimensions de formes et de positions relatives. Dans l'*Optique* d'Euclide, nous trouvons un groupe de six propositions (XXVIII à XXXIII) (P.V. Eecke, Bruges, 1938, p. 20-25). Ces propositions se rapportent aux cylindres et aux cônes à base circulaire regardés de divers points successivement considérés. Elles montrent d'abord quelles sont les parties de ces solides vues par l'oeil placé dans le plan de la base ou dans les plans parallèles à la base. Elles démontrent ensuite comment ces parties vues varient en réalité et en apparence suivant que l'oeil s'approche ou s'éloigne de ces solides dans ces mêmes plans. Enfin, elles déterminent deux plans passant par les tangentes menées de l'oeil à la base et par deux génératrices du cône, dont l'intersection est le lieu géométrique sur lequel l'oeil se déplace sans faire varier la partie réelle ou apparente du cône qui est vue.

se et leur validité et légitimité pour les mathématiciens qui travaillaient à l'aide des outils mathématiques hellénistiques, bien que sa période d'activité soit éloignée des grands géomètres, Euclide et Apollonios.

Le but du deuxième livre *Sur la section du cône* est l'étude comparative des sections produites dans un cône par des plans qui passent par son sommet. Ce livre est entièrement fondé sur la proposition 3 du premier livre des *Coniques* d'Apollonios, proposition qui permet dans tout cône coupé par le sommet d'obtenir comme section un triangle.

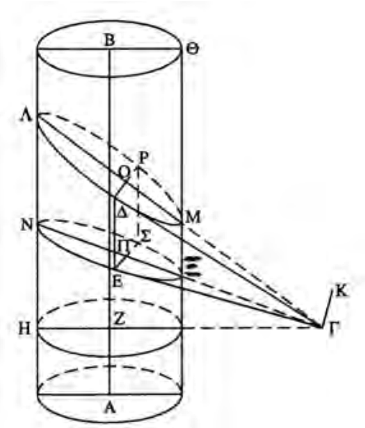
Dans ce traité Sérénos cherche à trouver les triangles maxima et minima établis par un plan qui passe par le sommet d'un cône oblique, c'est-à-dire qu'il cherche les valeurs minima et maxima d'une fonction selon que les sections sont axiales, parallèles ou isocèles.

Le livre de la *Section du cône* de Sérénos peut être partagé en trois parties relativement indépendantes. Dans la première partie, les propositions 1-14, il travaille sur les cônes droits; dans la deuxième, les propositions 15-57, il travaille sur les cônes obliques. La dernière partie propositions 58-69, constitue une section séparée du livre où il regarde les rapports entre les volumes de deux cônes droits en relation avec les hauteurs, les bases et les aires des sections triangulaires qui passent par l'axe. Dans chaque partie Sérénos se pose plusieurs problèmes et donne leur solution.

La nature des propriétés traitées dans son livre *Sur la Section du Cône* reste en partie un problème ouvert pour les historiens. Ensuite nous allons examiner quelques propositions (proposition 3, propositions 50-51), les comparer avec des propositions du traité d'*Optique* d'Euclide et jeter de la lumière à un deuxième aspect du traité qui consiste à fonder géométriquement des propriétés qui sont équivalentes avec des propriétés du domaine de l'optique géométrique.

1. Sur la Section du Cylindre

1.1. *Proposition 29*



« Les droites issues d'un même point et tangentes de part et d'autre à une surface cylindrique opèrent le contact le long des côtés d'un seul parallélogramme » (Ver Eecke, 1929 : 54-56).

Sérénos commence par la partie de l'*ekthesis* où il prend le cylindre de bases A, B et d'axe AB. D'un point **Γ** extérieur il mène les droites **ΓΔ**, **ΓΕ** qui touchent la surface du cylindre dans la même partie, aux points **Ε**, **Δ**. Dans la partie *diorismos* (diorisme) il écrit que ces points de contact sont situés sur une seule droite, c'est-à-dire sur une seule et même arête du cylindre.

Ensuite, dans la partie de la *construction-kataskeve* il construit pas à pas le cylindre des bases B, Z d'axe BZ et le plan axial **ΗΘ**. Ensuite, il mène la droite **ΓΚ** perpendiculaire sur la droite **ΓΖ** et dans le plan du cercle **Ζ**.

Par les droites **ΓΚ**, **ΓΔ** il détermine la ligne **ΛΔΜ** et par les droites **ΓΚ**, **ΓΕ** il détermine la ligne **ΝΕΞ** toutes les deux dans la surface du cylindre. Les droites **ΛΜΓ**, **ΝΞΓ** sont dans le plan du parallélogramme dont les droites **ΛΜ**, **ΝΞ** sont les diamètres des sections. Il abaisse les droites **ΔΟ**, **ΕΠ** d'une manière ordonnée sur les diamètres **ΛΜ**, **ΝΞ** (**ΔΟ//ΓΚ**, **ΕΠ//ΓΚ**) et il les prolonge aux points **Ρ**, **Σ**.

De ce point commence la partie de la *démonstration (apodeixis)* où par la proposition 36 du Livre I des *Coniques* d'Apollonios (il fait seulement référence au livre I des *Coniques* d'Apollonios, **ως δέδεικται τω Απολλωνίω εν τω α′ των Κωνικών**, c'est-à-dire ainsi que cela a été démontré par Apollonios dans le premier livre des Coniques) il établit qu'une telle section est une ellipse et non un cercle; il s'ensuit que **ΛΟ/ΟΜ** est égal au **ΛΓ/ΓΜ** et **ΝΠ/ΠΞ** est égal au **ΝΓ/ΓΞ**.

Les triangles **ΝΓΛ**, **ΞΓΜ** sont semblables (Euclide, *Les Eléments*, Livre VI, proposition 4) donc **ΝΓ/ΓΞ** est égal au **ΛΓ/ΓΜ** d'ou **ΝΠ/ΠΞ** est égal au **ΛΟ/ΟΜ** (Euclide, *Les Eléments*, Livre V, proposition 11).

La droite **ΠΟ** est située dans le plan **ΗΘ** (**ΠΟ//ΒΑ**, **ΠΟ//ΘΜ**).

Par construction il a **ΔΟ//ΓΚ**, **ΕΠ//ΓΚ** donc **ΔΟ//ΕΠ** (Euclide, *Les Eléments*, Livre I, proposition 30) et le plan **ΠΕΔΟ** est un parallélogramme. Il fait référence explicitement à son propre proposition 3 en écrivant que : ainsi que cela a été démontré au troisième théorème (Sérénos, *Sur la Section du Cylindre*, proposition 3). La droite **ΕΔ** est côté d'un parallélogramme. De façon pareil, pour toutes les tangentes, **ΡΣ** est une droite parallèle à la droite **ΕΔ** et **ΡΣ** est côté d'un parallélogramme.

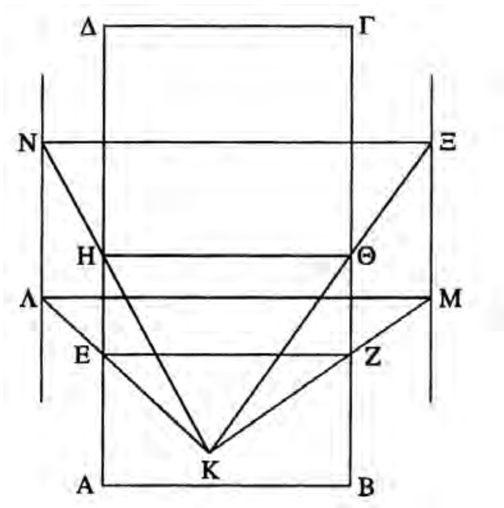
À la partie *conclusion* il écrit qu' « En conséquence, toutes les tangentes font leurs contacts suivant les côtés d'un parallélogramme; ce qui démontre la proposition ».

Dans la proposition 28 du traité d'*Optique*, Euclide démontre que « Si un cylindre est *regardé* d'un seul oeil *de quelque manière que ce soit*[2], on verra moins que le demi-cylindre » (Ver Eecke, 1938 : 72-73). Sérénos, dans sa proposition 29 démontre que « le lieu des

2. Nous avons mis les mots en italiques

points de contact d'un faisceau de tangentes menées d'un point de l'espace à la surface d'un cylindre est un parallélogramme dont le plan est parallèle à celui d'un parallélogramme axial ». Ce parallélogramme est plus petit que le parallélogramme axial qui correspond au parallélogramme du demi-cylindre (Euclide, *Optique*, proposition 28). Il utilise implicitement cette proposition d'Euclide dans sa démonstration, et pendant la procédure démonstrative il fait référence à la proposition 3 de son propre traité (*Sur la section du cylindre*) où il avait démontré que « lorsqu'un cylindre est coupé par un plan parallèle au parallélogramme passant par l'axe, la section sera un parallélogramme ayant des angles égaux à ceux du parallélogramme passant par l'axe ».

1.2. *Proposition 30*



Cette proposition commence sans enoncé avec l'expression « Cela étant démontré ». Donc Sérénos applique la propriété qu'il a démontré dans la proposition 29 dans cette proposition (Ver Eecke, 1929 : 56-58). Il prend un parallélogramme ΑΒΓΔ et il mène des droites ΕΖ//ΑΒ et ΗΘ //ΑΒ. Il prend un point K non situé dans le plan du parallélogramme. Il mène les droites ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ et en les prolongeant elles rencontrent un plan parallèle au plan ΑΒΓΔ aux points Λ, Μ, Ν, Ξ. Il mène un plan par les droites ΚΛ, ΕΖ qui coupe le plan ΛΜΝΞ et détermine la droite (section commune) ΛΜ//ΕΖ. Pareillement il détermine ΝΞ//ΗΘ.

Par Euclide (*Les Eléments*, Livre XI, proposition 16) il obtient ΝΛ//ΗΕ, ΞΜ//ΘΖ et par Euclide, (*Les Eléments*, Livre VI, proposition 2 et Livre V, proposition 18) il obtient ΗΚ/ΚΝ est égal au ΕΚ/ΚΛ.

Mais ΗΘ/ΝΞ est égal au ΗΚ/ΚΝ et ΕΖ/ΛΜ est égal au ΕΚ/ΚΛ (Euclide, *Les Eléments*, Livre VI, proposition 4) donc ΗΘ/ΝΞ est égal au ΕΖ/ΛΜ (Euclide, *Les Eléments*, Livre V, proposition 11) et il applique la propriété de la permutation (Euclide, *Les Eléments*, Livre V, proposition16) **ΕΖ** est égale à **ΗΘ** donc **ΛΜ** est égale à **ΝΞ** mais **ΛΜ//ΝΞ** (Euclide, *Les Eléments*, Livre XI, proposition 9), donc **ΜΞ//ΛΝ** (Euclide, *Les Eléments*, Livre I, proposition 33).

Jusqu'a ce point il a démontré que les droites **ΞΜ, ΛΝ** et **ΛΜ, ΞΝ** sont parallèles et **ΛΜΞΝ** est un parallélogramme. De ce point il passe au domaine de l'optique en écrivant que :

Si nous supposons que le point K est un point lumineux, et que le parallélogramme **ΑΓ** est ce qui intercepte ses rayons, qu'il soit autonome ou situé dans un cylindre, il se fera que les rayons lumineux émis par le point K aboutiront à la droite **ΜΛ** et à la droite **ΝΞ**; et ce qui se trouve entre les parallèles **ΜΛ**, **ΞΝ** sera ombrage.

À ce point il commence à examiner la définition des parallèles donnée par Python en soulignant que la droite **ΔΑ//ΓΒ** et la **ΝΛ//ΞΜ**. Ces droites n'apparaîtront cependant pas de cette manière car celle des distances **ΛΜ, ΝΞ** qui est plus rapprochée de la vue semblera être plus grande. Ici il fait référence explicite aux Optiques (Euclide, *Optique*, proposition 6[3]). Il écrit que **ταύτα δε παρειλήφαμεν εκ των Οπτικών**, c'est-à-dire que nous empruntons d'ailleurs ces choses aux Optiques.

La proposition 6 de l'*Optique* d'Euclide se fonde plutôt sur la définition 4 et considère les deux lignes parallèles sur le même plan en s'éloignant de l'observateur, mais aussi les lignes parallèles qui s'éloignent dans un autre plan. Dans ces deux cas, la démonstration de cette proposition prend en considération l'apparence des lignes parallèles pour les deux et les trois dimensions. En termes de perspective linéaire, elle établit que les lignes parallèles qui s'éloignent d'un oeil sur un plan apparaîtront en convergence (Ver Eecke, 1938 : 1).

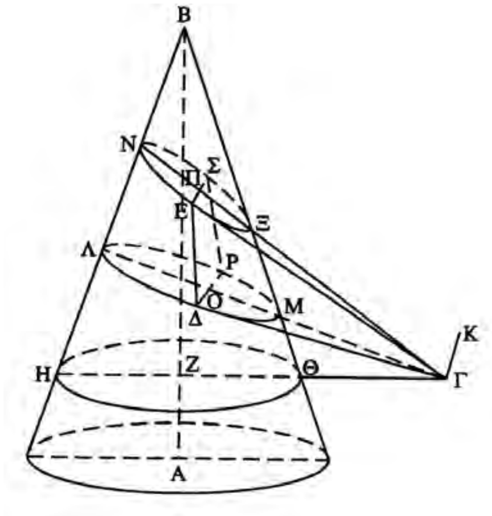
Nous remarquons que Sérénos dans ces propositions 29 et 30 démontre une propriété géométrique. Il prépare une figure qui se base sur cette dernière proposition (proposition 29) et applique sur celle-ci l'optique géométrique (deuxième partie de la proposition 30) pour examiner la définition des parallèles de Python. Pour le faire il utilise plusieurs propositions des *Eléments* d'Euclide (Livre I, propositions 30, 33; Livre V, propositions 11, 16, 18; Livre VI, propositions 2, 4; Livre XI, propositions 9, 16), Il fait référence explicite au livre I des *Coniques* d'Apollonios de Pergé et à l'*Optique* d'Euclide. Il ne mentionne pas explicitement pour les deux cas le numéro de la proposition. Il utilise aussi une autoréférence explicite sur une de ses propositions en soulignant le numéro de cette proposition qui se trouve dans le même traité (proposition 3).

Ensuite, Sérénos écrit « puisque l'ellipse est commune au cône et au cylindre, il y a corrélation à considérer dans le cône la parité de ce que nous avons observé dans le cylindre, considérons-la maintenant dans le cône ». Donc, il démontre les mêmes propriétés dans le cône (propositions 32 et 33). Pour la proposition 32, Sérénos a besoin de la propriété d'un rapport harmonique qu'il a établie dans la proposition précédente (proposition 31).

3. Euclide, *Optique*, proposition 6, Des intervalles de même dimension, vus à distance, paraissent d'inégale longueur. (Ver Eecke, 1938: 4-5)

1.3. *Proposition 31*

« Si l'on prend un point à l'extérieur d'un triangle; si, de ce point, l'on mène une droite qui coupe le triangle, et si l'on amène, du sommet sur la base, une autre droite coupant la droite ainsi menée transversalement, de manière que le grand segment découpé à l'intérieur du triangle soit au petit segment adjacent à celui qui est à l'extérieur du triangle comme la droite entière menée transversalement est au segment situé à l'extérieur du triangle; toute droite qui, menée du point qui a été pris, coupe le triangle, sera coupée dans le même rapport par la droite amenée du sommet sur la base. Et si toutes les droites ainsi menées du même point sont coupées dans le même rapport, la droite qui, menée dans le triangle, les coupe, passera par le sommet du triangle » (Ver Eecke, 1929 : 58).

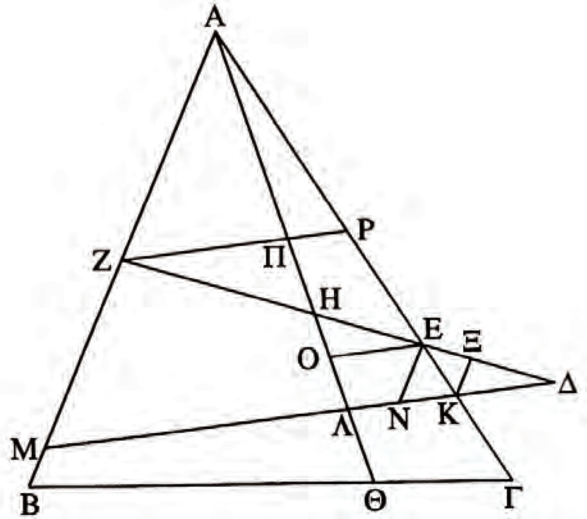


Le faisceau des droites menées du point Δ extérieur au triangle sera divisé dans un rapport harmonique par la droite ΑΘ qui coupe la droite ΖΔ de telle sorte que ΖΗ/ΗΕ est égal au ΖΔ/ΔΕ et menons transversalement une autre droite ΔΚΛ, c'est-à-dire ΜΛ/ΛΚ est égal au ΜΔ/ΔΚ.

En regardant minutieusement la procédure démonstrative nous remarquons que l'auteur utilise les propositions des *Eléments* d'Euclide (Livre VI, 2, 4; Livre V, 18, définition 20) et aussi sa propre proposition 23.

1.4. *Proposition 32*

« Toutes les droites qui, partant d'un même point, touchent de part et d'autre sur une surface conique, font leur contact suivant les côtés d'un seul triangle » (Ver Eecke, 1929: 61-63).



Il commence dans la partie de l'*ekthesis* où il prend le cône de base A, du sommet B et d'axe AB. D'un point **Γ** extérieur il mène les droites **ΓΔ**, **ΓΕ** tangentes qui touchent la surface du cône dans la même partie, aux points **Ε, Δ**. Dans la partie *diorismos (diorisme)* il écrit que ces points de contact sont situés sur une seule droite.

Ensuite, dans la partie de la *construction-kataskeve* il construit pas à pas le cône de base Z, du sommet B et d'axe BZ. Ensuite il construit le plan axial **ΒΗΘ** et il mène la droite **ΓΚ** perpendiculaire sur la droite **ΓΖ** est dans le plan du cercle **Ζ**.

Par les droites **ΓΚ**, **ΓΔ** il détermine la ligne **ΛΔΜ** et par les droites **ΓΚ**, **ΓΕ** il détermine la ligne **ΝΕΞ**, toutes les deux dans la surface du cône. Les droites **ΛΜΓ**, **ΝΞΓ** sont dans le plan du parallélogramme dont les droites **ΛΜ**, **ΝΞ** sont les diamètres des sections. Il abaisse les droites **ΔΟ**, **ΕΠ** d'une manière ordonnée sur les diamètres **ΛΜ**, **ΝΞ** (**ΔΟ//ΓΚ**, **ΕΠ//ΓΚ**) et il les prolonge aux points **Ρ**, **Σ**.

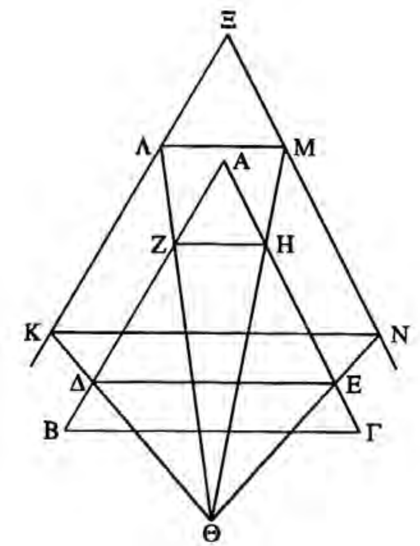
De ce point commence la partie de la *démonstration (apodeixis)* où par la proposition 36 du Livre I des *Coniques* d'Apollonios (sans référence au livre I des *Coniques*) il établit qu'une telle section est une ellipse, et non un cercle; il s'ensuit que **ΛΟ/ΟΜ** est égal au **ΛΓ/ΓΜ** et **ΝΠ/ΠΞ** est égal au **ΝΓ/ΓΞ**.

Par la proposition 31 de la *Section du Cylindre* de Sérénos (il fait autoréférence, **δια το προ τούτο**, c'est-à-dire en vertu de la proposition qui précede) la droite réliant les points **Ο** et **Π** prolongée passera par le sommet. Les droites **ΛΓ**, **ΝΓ** étant divisées dans un rapport harmonique, la droite **ΟΠ** prolongée passera par le sommet B du triangle axial du cône. Après, il mène la droite **ΟΠΒ**.

Les droites **ΕΣ** et **ΔΡ** sont parallèles à la droite **ΓΚ** donc **ΕΣ** est parallèle à la droite **ΔΡ** (Euclide, *Les Eléments*, Livre XI, proposition 9). Par Apollonios, sans référence (*Les Co-*

niques, Livre I, proposition 3[4]), le plan étendu par la droite **ΒΠΟ** et par les droites **ΕΣ**, **ΔΡ** détermine un triangle comme section dans la surface du cône. Donc les points **Δ**, **Ε** situés dans la surface du cône, sont sur le côté du triangle qui coupe le triangle **ΒΗΘ** suivant la droite **ΒΠΟ**. Les mêmes choses se présentent pour toutes les tangentes aux points **Ρ**, **Σ**. Dans la partie conclusion il écrit que « Par conséquent, toutes les droites issues du point **Γ**, qui touchent la surface conique tombent sur les côtés d'un seul triangle; ce qu'il fallait démontrer » (Ver Eecke, 1929 : 63).

1.5. *Proposition 33*



La partie démonstrative (Ver Eecke, 1929 : 63-64) commence avec l'expression « Cela étant démontré ». Donc Sérénos applique la propriété de la proposition 32 dans la proposition suivante. Il prend un triangle **ΑΒΓ** et il mène des droites **ΔΕ//ΒΓ** et **ΖΗ//ΒΓ**. Il prend point **Θ** non situé dans le plan du triangle. Il mène les droites **ΘΔ, ΘΖ, ΘΗ, ΘΕ** et en les prolongeant elles rencontrent un plan parallèle au plan **ΑΒΓ** aux points **Κ, Λ, Μ, Ν.** Il mène un plan par les droites **ΕΔ**, **ΚΘ** qui coupe le plan **ΚΛΜΝ** et détermine la droite (section commune) **ΚΝ//ΕΔ** (Euclide, *Les Eléments*, Livre XI, proposition 16). Pareil, il détermine **ΛΜ//ΖΗ** et **ΚΛ//ΔΖ** et **ΝΜ//ΗΕ**. Les droites prolongées se rencontrent au point Ξ. En conséquence, **ΚΞ//ΔΑ**, **ΞΝ//ΑΕ**. L'angle situé au point Ξ sera égal à l'angle situé au point Α (Euclide, *Les Eléments*, Livre XI, proposition 10). Par la même proposition des *Eléments*

4. Si un cône est coupé par un plan passant par son sommet, alors cette section est un triangle rectiligne (Rashed, 2008: 266).

d'Euclide et par le fait que ΞΚ//ΑΔ, ΚΝ//ΔΕ l'angle compris sous les droites ΞΚ, ΚΝ est égal à l'angle compris sous les droites ΑΔ, ΔΕ et par Euclide (*Les Eléments,* Livre VI, proposition 4) les triangles ΞΚΝ, ΑΒΓ sont semblables entre eux.

Jusqu'à ce point il a démontré que les droites ΚΞ, ΑΒ et ΞΝ, ΑΓ sont parallèles et ΚΞΝ est un triangle semblable au triangle ΑΒΓ. De ce point il passe au domaine de l'optique en écrivant que :

Si nous supposons que le point Θ soit un point lumineux, et que le triangle ΑΒΓ soit ce qui intercepte ses rayons, que ce triangle soit autonome ou situé dans un cône, il se fera que les rayons lumineux émis par le point Θ non retenus par le triangle ΑΒΓ, détermineront le triangle d'ombre ΚΞΝ, semblable au triangle ΑΒΓ (Ver Eecke, 1929 : 64).

Au contraire de la proposition 30 dans la proposition 33 il ne discute pas la définition des parallèles et donc Sérénos finit à ce point la démonstration de cette proposition.

Nous remarquons que Sérénos dans ces propositions 32 et 33 démontre une propriété géométrique. Il prépare une figure qui se base sur cette dernière proposition (proposition 32) et applique sur celle-ci l'optique géométrique (deuxième partie de la proposition 33) pour examiner la définition des parallèles de Python. Pour ce faire il utilise plusieurs propositions des *Eléments* d'Euclide (Livre VI, proposition 4; Livre XI, propositions 9, 10, 16), Il ne fait pas référence explicite au livre I des *Coniques* d'Apollonios de Pergé et à l'*Optique* d'Euclide. Il utilise les propositions 3 et 36 du Livre I des *Coniques* d'Apollonios. Il utilise sa proposition 31 que nous avons examiné précédemment.

Il finit ce traité avec le paragraphe suivant où il souligne que

> « Quoique ces choses appartiennent à la théorie optique et qu'elles paraissent de ce fait être étrangères au présent ouvrage, il est clair cependant, qu'à défaut de ce qui a été démontré ici concernant la section du cylindre et du cône, et notamment concernant l'ellipse et les droites qui lui sont tangentes, un problème de ce genre-ci eut été impossible à établir; de sorte que ce n'est pas sans raison, mais pour leur usage, que la mention de ces choses a été introduite » (Ver Eecke, 1929 : 64).

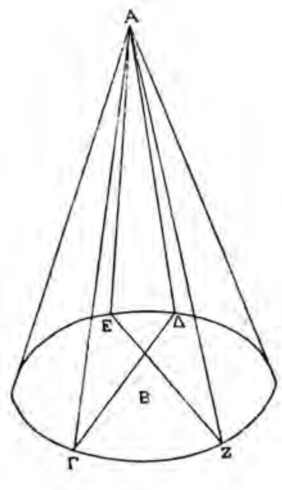
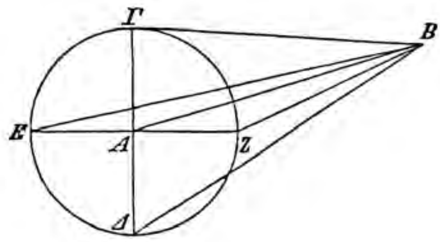
Nous pouvons remarquer que Sérénos veut discuter une définition des parallèles par observation et il termine sa discussion en disant qu'il a entrepris à la démontrer car ces choses sont importantes pour leur usage.

2. Sur la Section du Cône

Dans la définition 2 (Ver Eecke, 1938 : 1) du traité de l'*Optique* Euclide introduit les cônes de vision comme des figures géométriques qui se sont formées par les rayons visuels qui relient le point d'observation (sommet du cône) et les points qui se trouvent sur le contour de l'objet visé. La proposition 3 (Ver Eecke, 1929 : 67-68) de *la Section du Cône* peut être optiquement parlant équivalente à l'idée des cônes visuelles d'Euclide étant donné que le sommet du cône est au centre de l'oeil, donc le point d'observation et toutes les propositions suivantes utilisent ce résultat.

Ensuite, nous allons comparer la proposition 3 (Ver Eecke, 1929 : 67-68) de la *Section du Cône* et la proposition 34 (cas 1 de la démonstration, Ver Eecke, 1938 : 26) de l'*Optique* et les propositions 50-51 (Ver Eecke, 1929 : 137-140) avec la proposition 34 (cas 2 de la démonstration). Par cette comparaison nous allons constater l'existence de propositions qui ont des rapports étroits avec des propositions qui traitent des mêmes propriétés mathématiques et qui appartiennent aux propriétés du domaine de l'optique géométrique.

2.1. *Comparaison de la proposition 3 du traité Sur la Section du Cône de Sérénos d'Antinoé avec la proposition 34 du traité d'Optique (cas 1) d'Euclide*

Sérénos d'Antinoé Sur la Section du Cône Proposition 3	Euclide Optique Proposition 34 (cas 1)
Lorsqu'un cône droit est coupé par des plans passant par le sommet, les triangles qui, déterminés dans les sections ont des bases égales, sont égaux entre eux.	Si on élève, du centre d'un cercle, une droite à angles droits sur le plan de ce cercle, et si l'on place l'oeil sur celle-ci, les diamètres menés transversalement dans le plan du cercle apparaîtront tous égaux.
	

Sérénos dans la démonstration de cette proposition, détermine l'égalité des triangles, donc il démontre l'égalité des angles ΕΑΖ et ΓΑΔ (figure 6). La procédure démonstrative suit les pas suivants : Soit un cône de sommet A et comme base le cercle de centre B. Le cône étant coupé par des plans passant par le sommet, il obtient les triangles déterminés par la section car il a été montré ailleurs que de telles sections déterminent des triangles (Apollonios, *Les Coniques,* livre I proposition, 3). Il obtient des triangles ΑΓΔ, ΑΕΖ ayant des bases égales **ΓΔ**, **EZ**; il dit que les triangles **ΑΓΔ**, **AEZ** sont égaux. En effet, puisque les bases sont égales entre elles et que les droites **ΑΓ**, **ΑΔ**, **AE**, **AZ** sont aussi égales, il s'ensuit que le triangle **ΑΓΔ** sera aussi égal au triangle **AEZ** (Euclide, *Les Eléments*, Livre I, proposition 8)·

Euclide démontre dans la première partie de cette proposition que les diamètres sont vus égaux. Il écrit qu'étant donné un cercle avec centre **A**, on mène une droite perpendiculaire à ce point au niveau du cercle **AB** sur laquelle il mène l'oeil au point **B**. Il dit que les diamètres seront vus égaux. Soit deux diamètres **ΓΔ**, **EZ** et il mène les droites **ΒΓ**, **BE**, **ΒΔ**, **BZ**. La droite **ZA** est égal à la droite **ΑΓ**, la droite **AB** est commune et les angles droits. Il conclut que la base **ZB** est égal à la droite **ΒΓ** et les angles aux bases sont égaux. Donc, l'angle ZBA est égal à l'angle **ΑΒΓ**. Pareillement l'angle **EBA** est égal à l'angle **ΑΒΔ**, donc l'angle **ΓΒΔ** est égal à l'angle **EBZ**. Les choses vues par des angles égaux seront vues égaux. Donc la droite **ΓΔ** sera vue égale à la droite **EZ**.

Euclide démontre dans la première partie que les diamètres sont égaux. Dans cette proposition, il démontre un cas qui n'a pas été précisé dans l'énoncé et il prouve exactement la même propriété entre les diamètres. À la fin de la proposition, il généralise en écrivant que: « Si l'on a un cercle qui est le plus grand dans une sphère, et si l'oeil se transporte n'importe où à la surface de la sphère en regardant la circonférence du cercle, les diamètres seront vus égaux » (Ver Eecke, 1926 : 26).

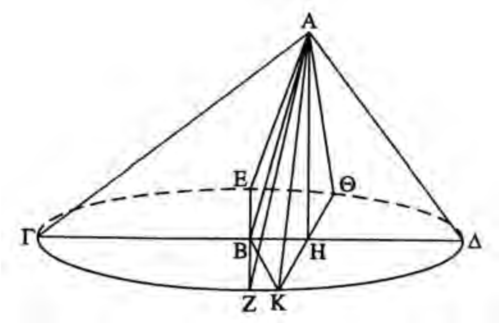
Quand Euclide écrit que les diamètres seront vus égaux, il veut dire que les angles qui regardent les diamètres sont égaux. Après cette remarque, nous constatons que Sérénos et Euclide démontrent la même propriété. Sérénos montre un cas plus général qu'Euclide parce qu'à la place des diamètres (cas d'Euclide) il prend des droites égales dans un cercle. Euclide démontre sa proposition pour le cas du cône droit (première partie de la démonstration) et du cône oblique (seconde partie de la démonstration).

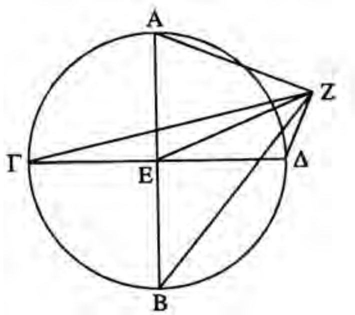
Euclide démontre cette proposition dans le groupe des lemmes qui lui serviront de base pour la proposition 36. Les propositions 34, 35 et 36 considèrent la manière dont se présentent à la vue les diamètres d'un cercle regardé d'un point extérieur à son plan. La première de ces propositions démontre que les diamètres apparaissent égaux dans trois cas : 1. celui où l'oeil est placé en un point quelconque de la perpendiculaire élevée au centre du cercle; 2. celui où l'oeil est placé à l'extrémité d'une droite qui, menée par le centre du cercle, obliquement à son plan, est égale au rayon; et enfin 3. celui où l'oeil est placé en un point quelconque de la droite qui, menée obliquement par le centre du cercle, forme des angles égaux avec deux diamètres perpendiculaires entre eux. La seconde de ces propositions (proposition 35) traite le cas génèral de l'oeil placé sur la droite qui, élevée obliquement au centre du cercle, est plus grande ou plus petite que le rayon, et ne fait pas, comme dans le cas de la proposition précédente, des angles égaux avec de diamètres à angles droits. Il démontre que ces diamètres apparaissent toujours inégaux. Dans la proposition 36, il démontre que « les roues des chars apparaissent tantôt circulaires tantôt oblongues » (Ver Eecke, 1938 : 34). Cette proposition vise d'ailleurs un phénomène plutôt théorique car, en regardant obliquement un char, le concept de la roue dissipe l'illusion visuelle tandis que le phénomène se matérialise lorsque l'ombre de la roue est projetée sur le sol sous la forme d'une ellipse par les rayons obliques du soleil. La démonstration nous indique que si l'oeil ne se trouve pas sur le même plan que la roue et qu'il est localisé perpendiculairement en dessus de son centre, le contour de la roue va apparaître rond. Si l'oeil est placé à une distance égale au rayon de la roue (il n'est pas placé sur le même plan) la roue apparaît ronde. Pour toutes les autres positions en dehors du plan de la roue, le contour apparaît oblong. Cette proposition est une application des propriétés que nous trouvons bien développées dans les propositions 34 et 35. Ces propositions sont fondées sur la définition 4 et produisent des relations de dimensions relatives.

La proposition 3 de la *Section du Cône* démontre la même propriété que la proposition 34 d'*Optique*. De plus, ces deux propositions sont indispensables pour la démonstration de plusieurs propositions qui suivent et qui résolvent d'autres problèmes.

2.2. *Comparaison des propositions 50-51 du traité Sur la Section du Cône de Sérénos d'Antinoé avec la proposition 34 (cas 2) du traité d'Optique d'Euclide*

Sérénos d'Antinoé Sur la Section du Cône Proposition 50-51	Euclide Optique Proposition 34 (cas 2)
Si l'axe d'un cône oblique est égal au rayon de la base, le plus petit des triangles passant par l'axe sera au triangle isocèle qui est à angles droits sur la base comme le plus grand triangle passant par l'axe est au plus petit.	Si on élève, du centre d'un cercle, une droite à angles droits sur le plan de ce cercle, et si l'on place l'oeil sur celle-ci, les diamètres menés transversalement dans le plan du cercle apparaîtront tous égaux.





Dans la proposition 49 (Ver Eecke, 1929 : 136-137), Sérénos démontre que « parmi les triangles qui passent par l'axe, ceux qui sont symétriques sont équivalents et semblables ». Dans les deux énoncés, propositions 50-51 de Sérénos et proposition 34 (cas 2) d'Euclide, nous constatons que la relation entre l'axe et le rayon de la base dans un cône oblique détermine les relations entre triangles semblables chez Sérénos et entre angles égaux donc diamètres vus égaux chez Euclide.

Dans la démonstration Sérénos suit les pas suivants : Soit un cône oblique avec sommet Α et axe ΑΒ égal au rayon de la base du cercle avec centre le point Β. Soit, parmi les triangles passant par l'axe, le triangle ΓΑΔ à angles droits sur la base et le triangle isocèle ΕΑΖ. Le triangle ΕΑΖ est le plus grand de ceux qui passent par l'axe et le triangle ΓΑΔ est le plus petit (Sérénos, *Sur la Section du Cône,* proposition 24). Il mène la perpendiculaire du point Α sur la base; elle tombera sur le diamètre ΓΔ (Euclide, *Les Eléments*, livre XI, définition 4). Que ce soit la droite ΑΗ; il mène la droite ΘΗΚ à angles droits sur la droite ΓΔ dans le cercle et il étend un plan par les droites ΑΗ, ΘΗΚ déterminant le triangle ΘΑΚ qui sera isocèle et à angles droits sur la base (Sérénos, *Sur la Section du Cône*, proposition 22 et Euclide, *Les Eléments,* Livre XI, proposition 18). Sérénos dit que le triangle ΓΑΔ, le plus petit de ceux qui passent par l'axe, sera au triangle isocèle ΘΑΚ comme le triangle ΕΑΖ, le plus grand de ceux qui passent par l'axe, est au plus petit triangle ΓΑΔ. Donc, triangle ΕΑΖ /triangle ΓΑΔ est égal au ΒΑ/ΑΗ et triangle ΓΑΔ/ triangle ΘΑΚ est égal au ΓΔ/ΘΚ qui est égal au ΕΖ/ΘΚ et égal au ΒΚ/ΚΗ. Or, par hypothèse, ΒΑ est égale au rayon ΒΚ, d'où l'égalité des triangles rectangles ΒΑΗ, ΒΚΗ; donc ΒΑ/ΑΗ est égal au ΒΚ/ΚΗ, d'où triangle ΑΔ / triangle ΘΑΚ est égal au ΒΑ/ΑΗ, donc triangle ΓΑΔ/ triangle ΘΑΚ est égal au triangle ΕΑΖ/triangle ΓΑΔ.

La proposition 51 est la réciproque de la proposition 50 et à la fin Sérénos écrit :

Dès lors, il est clair que si l'axe d'un cône oblique est égal au rayon de la base, le triangle isocèle, qui est à angles droits sur la base sera semblable au triangle isocèle passant par l'axe; et réciproquement, que si le triangle isocèle, qui est à angles droits sur la base, est semblable au triangle isocèle passant par l'axe, l'axe du cône sera égal au rayon de la base; car cela aussi est facile à comprendre en vertu des choses déjà démontrées (Ver Eecke, 1929 : 140).

Dans l'examen du cas 2 de la proposition 34 Euclide prend la droite menée par le centre qui n'est pas perpendiculaire au niveau, mais égale au rayon, donc tous les diamètres seront vus égaux.

Dans la procédure démonstrative il prend le cercle ΑΒΓΔ et il mène deux diamètres ΑΒ, ΓΔ. Soit ΖΕ droite menée par le point Ε sur laquelle on met l'oeil au point Ζ. Cette droite n'est pas perpendiculaire mais égale au rayon et il mène les rayons visuelles ΖΑ, ΖΓ, ΖΒ, ΖΔ. La droite ΒΕ est égale à la droite ΕΖ, la droite ΕΑ est égale à la droite ΕΖ d'où il s'ensuit que les droites ΕΖ, ΕΑ et ΕΒ sont égales. Le demi-cercle décrit autour du diamètre ΑΒ au niveau qui passe par les droites ΑΒ, ΕΖ passe par le point Ζ, donc l'angle ΑΖΒ est droit. Pareillement l'angle ΓΖΔ est droit. Les angles droits sont égaux et les objets vus sous les angles égaux sont aussi égaux. Donc la droite ΑΒ sera vue égale à la droite ΓΔ.

Euclide démontre cette proposition comme réponse à l'énoncé dans lequel il examine la question suivante : « Si une droite tombant de l'oeil au centre d'un cercle n'est pas perpendiculaire au plan de ce cercle, ni égale à son rayon, mais est plus grande ou plus petite que celui-ci, les diamètres du cercle paraîtront inégaux » (Ver Eecke, 1926 : 26).

Dans cette partie de notre travail, nous pouvons constater que les figures des propositions sont identiques, mais que les propriétés démontrées ne coïncident pas. L'équivalence des propositions se fonde sur le fait que Sérénos et Euclide travaillent sur les inégalités des segments et les inégalités des triangles, ainsi que sur la relation entre l'axe et le rayon de la base dans un cône oblique, d'où ils déterminent les relations entre triangles et entre angles.

3. Conclusion

Dans la *Section du cylindre* et la *Section du cône* de Sérénos d'Antinoé nous avons vu l'existence, parmi les sujets traités, des propriétés qui traitent des problèmes optiques et des propriétés qui sont équivalentes aux propriétés du domaine de l'optique géométrique. Dans la deuxième partie de *la Section du Cylindre*, on pourrait dire que Sérénos essaie de représenter les parallèles par les moyens de l'optique géométrique. L'effort de Sérénos s'inscrit dans le mouvement des mathématiciens de l'Antiquité qui tentent de définir d'une manière différente d'Euclide les droites parallèles.

La nature des propriétés traitées dans son traité *Sur la Section du Cône* reste, selon nous, en partie un problème ouvert pour les historiens et il va rester car le matériel concernant cette tradition de recherche dans le domaine des mathématiques ou de l'optique mathématique est disparu. A part l'accord sur le fait que le but de Sérénos est de faire une étude comparative des sections produites dans un cône par l'intersection d'un plan qui passe par son sommet dans ce traité, nous avions montré que la proposition 3 peut être optiquement parlant équivalente à l'idée des cônes visuelles d'Euclide étant donné que le sommet du cône est au centre de l'oeil. L'analyse textuelle a montré que cette proposition est équivalente à la proposition 34 (cas 1) de l'*Optique* d'Euclide; cette démonstration est la contribution principale de cette partie de notre article.

Sérénos dans ces traités montre une connaissance de l'*Optique* d'Euclide. Il utilise aisément quelques propositions du domaine de l'optique dans le domaine des sections coniques et cylindriques pour examiner un problème lié à la théorie des parallèles. A ma connaissance c'est la prémière fois que cela est traité avec les moyens d'optique géométrique et des coniques. La perspective des traités de Sérénos et de l'*Optique* d'Euclide est différente et ces derniers résolvent des problèmes de nature différente.

4. Bibliographie

DECORPS-FOULQUIER M.; FEDERSPIEL, M. (Eds) (2008), Apollonius de Perge, Coniques, Tome 1.2 : Livre I, Édition et traduction du texte grec, Walter de Gruyter – Berlin – New York.

DECORPS-FOULQUIER, M. (2000), *Recherche sur les Coniques d'Apollonios de Pergé et leurs commentateurs grecs, Histoire de la transmission des livres I-IV,* Librairie C. Klincksieck et Cie.

RASHED, ROSHDI (Ed.) (2008), *Apollonius de Perge, Coniques*, Tome 1.1 : Livre I, Commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe, Walter de Gruyter – Berlin – New York.

VER EECKE, P. (1929), Sérénus d'Antinoë : Le livre de la Section du Cylindre et le livre de la Section du Cône. Paris, Bruges, Desclée de Brouwer et Cie.

VER EECKE, P. (1938), *Euclide, L'Optique et la Catoptrique*, Bruges, Desclée de Brouwer et Cie.

WHITTAKER, J. (1979), "Harpocration and Serenus in a Paris manuscript", *Scriptorium*, **33,** 1, 59-62.